Corrigé détaillé de l'Examen National de Mathématiques 2003 – Session Normale

Sciences Mathématiques A et B

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact : 0644127117 / 0708875223

Exercice 1

On veut résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$(E) : \quad x^2(x^2+7) = y(2x+y).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $\delta = \mathrm{PGCD}(x, y)$. On pose :

$$x = \delta a \qquad \text{et} \qquad y = \delta b.$$

Alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

1) a) **Vérifier que :**

$$a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b).$$

Corrigé :
Comme (x, y) est solution de (E), on a :

$$(\delta a)^2\big((\delta a)^2 + 7\big) = \delta b(2\delta a + \delta b).$$

Donc :

$$\delta^2 a^2(\delta^2 a^2 + 7) = \delta^2 b(2a+b).$$

Puisque $\delta \neq 0$, on divise par δ^2 :

$$a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b).$$

b) **En déduire l'existence d'un entier naturel k tel que :**

$$2a + b = ka^2 \qquad \text{et} \qquad \delta^2 a^2 + 7 = kb.$$

Corrigé :
On a :

$$a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b).$$

Comme $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, alors :

$$\mathrm{PGCD}(a^2, b) = 1.$$

Ainsi, a^2 divise $b(2a+b)$ et a^2 est premier avec b. D'après le théorème de Gauss :

$$a^2 \mid (2a+b).$$

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$2a + b = ka^2.$$

En remplaçant dans l'égalité précédente :

$$a^2(\delta^2 a^2 + 7) = bka^2.$$

Comme $a \neq 0$, on divise par a^2 :

$$2a + b = ka^2 \quad \text{et} \quad \delta^2 a^2 + 7 = kb.$$

c) **En déduire que : $a = 1$.**

Corrigé :

On a :

$$2a + b = ka^2.$$

Donc :

$$b = ka^2 - 2a = a(ka - 2).$$

Ainsi :

$$a \mid b.$$

Or :

$$\text{PGCD}(a, b) = 1.$$

Donc :

$$a = 1.$$

d) **En déduire que :**

$$(b+1)^2 = \delta^2 + 8.$$

Corrigé :

Puisque $a = 1$, les relations deviennent :

$$2 + b = k$$

et :

$$\delta^2 + 7 = kb.$$

Donc :

$$\delta^2 + 7 = b(b+2) = b^2 + 2b.$$

Ainsi :

$$\delta^2 + 8 = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2.$$

Par conséquent :

$$(b+1)^2 = \delta^2 + 8.$$

2) **Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).**

Corrigé :

D'après la question précédente :

$$(b+1)^2 - \delta^2 = 8.$$

Donc :

$$(b+1-\delta)(b+1+\delta) = 8.$$

Les deux facteurs sont positifs et de même parité. La seule possibilité est :

$$b + 1 - \delta = 2 \qquad \text{et} \qquad b + 1 + \delta = 4.$$

En additionnant :

$$2(b+1) = 6.$$

Donc :

$$b = 2.$$

Puis :

$$3 - \delta = 2.$$

Donc :

$$\delta = 1.$$

Comme $a = 1$, on obtient :

$$x = \delta a = 1 \qquad \text{et} \qquad y = \delta b = 2.$$

Vérification :

$$1^2(1^2 + 7) = 8$$

et :

$$2(2 \times 1 + 2) = 8.$$

Ainsi :

$$(x, y) = (1, 2).$$

Exercice 2

On considère la courbe (E) d'équation :

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}.$$

1) a) **Montrer que (E) est une partie d'une ellipse qu'on déterminera.**

Corrigé :

On a :

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}.$$

Donc :

$$16 - x^2 \geq 0 \implies -4 \leq x \leq 4.$$

De plus :

$$y \geq 0.$$

En élevant au carré :

$$y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2).$$

Donc :

$$16y^2 = 144 - 9x^2.$$

Ainsi :

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

En divisant par 144 :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Donc (E) est la demi-ellipse supérieure de centre O, de demi-axes 4 et 3 :

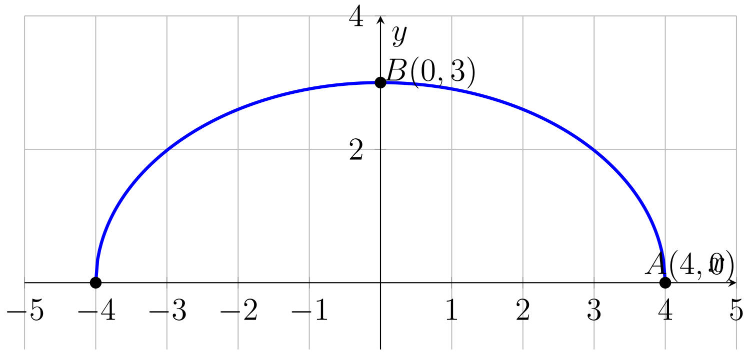
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{avec } y \geq 0.$$

b) **Tracer la courbe (E).**

Corrigé :

La courbe passe par :

$$(-4, 0), \quad (4, 0), \quad (0, 3).$$



Soient $A(4,0)$ et $B(0,3)$. Soit $M_1(x_1)$ un point de (E) avec $x_1 \in [0,4]$. On pose :

$$x_1 = 4\cos t_1, \qquad 0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}.$$

On considère :

$$I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{x_1}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx.$$

2) a) **Par le changement de variable $x = 4\cos t$, montrer que :**

$$I(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1).$$

Corrigé :

On pose :

$$x = 4\cos t.$$

Alors :

$$dx = -4\sin t\, dt.$$

De plus :

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16\cos^2 t} = 4\sin t$$

car $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Lorsque $x = x_1 = 4\cos t_1$, on a $t = t_1$; lorsque $x = 4$, on a $t = 0$. Donc :

$$I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{t_1}^{0} 4\sin t(-4\sin t)\, dt.$$

Ainsi :

$$I(x_1) = 12\int_{0}^{t_1} \sin^2 t\, dt.$$

Or :

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

Donc :

$$I(x_1) = 12\int_{0}^{t_1} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\, dt.$$

Ainsi :

$$I(x_1) = 6\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{t_1}.$$

D'où :

$$I(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1).$$

b) **Vérifier que l'ordonnée du point M_1 est $3\sin(t_1)$.**

Corrigé :

Comme $M_1 \in (E)$:

$$y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x_1^2}.$$

Or :

$$x_1 = 4\cos t_1.$$

Donc :

$$y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - 16\cos^2 t_1} = \frac{3}{4}\sqrt{16\sin^2 t_1}.$$

Comme $0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$, on a $\sin t_1 \geq 0$. Donc :

$$y_1 = \frac{3}{4} \times 4\sin t_1.$$

Ainsi :

$$y_1 = 3\sin t_1.$$

c) **Calculer l'aire $S(x_1)$ en fonction de t_1.**

Corrigé :

On note $P(x_1, 0)$. L'aire demandée est :

$$S(x_1) = I(x_1) + \mathcal{A}_{\triangle OPM_1}.$$

Or :

$$\mathcal{A}_{\triangle OPM_1} = \frac{1}{2}x_1 y_1.$$

Donc :

$$\mathcal{A}_{\triangle OPM_1} = \frac{1}{2}(4\cos t_1)(3\sin t_1).$$

Ainsi :

$$\mathcal{A}_{\triangle OPM_1} = 6\sin t_1 \cos t_1 = 3\sin(2t_1).$$

D'où :

$$S(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1) + 3\sin(2t_1).$$

Par conséquent :

$$S(x_1) = 6t_1.$$

d) **En déduire l'aire S.**

Corrigé :

L'aire S correspond au cas $M_1 = B(0, 3)$, donc $x_1 = 0$. Ainsi :

$$4\cos t_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$S = 6 \times \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent :

$$S = 3\pi.$$

e) **Montrer que :**

$$S(x_1) = \frac{S}{2} \iff t_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Corrigé :

On a :

$$S(x_1) = 6t_1$$

et :

$$S = 3\pi.$$

Donc :

$$S(x_1) = \frac{S}{2} \iff 6t_1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$t_1 = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc :

$$S(x_1) = \frac{S}{2} \iff t_1 = \frac{\pi}{4}.$$

f) **Déterminer les coordonnées de M_1 dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ lorsque $t_1 = \frac{\pi}{4}$.**

Corrigé :

Dans le repère usuel :

$$x_1 = 4\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

et :

$$y_1 = 3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, on écrit :

$$\overrightarrow{OM_1} = X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB}.$$

Comme :

$$\overrightarrow{OA} = (4, 0), \qquad \overrightarrow{OB} = (0, 3),$$

on obtient :

$$(x_1, y_1) = (4X, 3Y).$$

Donc :

$$X = \frac{x_1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad Y = \frac{y_1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi :

$$M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}.$$

Exercice 3

Première partie

On considère :

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1) **Montrer que E est stable pour l'addition et la multiplication.**
Corrigé :
Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de E.
Pour l'addition :

$$M(a,b)+M(c,d)=\begin{pmatrix} a+b+c+d & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}=M(a+c,b+d)\in E.$$

Pour la multiplication :

$$M(a,b)M(c,d)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$M(a,b)M(c,d)=\begin{pmatrix} ac+ad+bc & -(ad+bc+bd) \\ ad+bc+bd & ac-bd \end{pmatrix}.$$

En posant :

$$A=ac-bd, \qquad B=ad+bc+bd,$$

on a :

$$A+B=ac+ad+bc.$$

Donc :

$$M(a,b)M(c,d)=M(A,B)\in E.$$

Ainsi :

E est stable pour $+$ et pour $\times$.

2) **Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.**
Corrigé :
La matrice nulle appartient à E car :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=M(0,0).$$

Si $M(a,b)\in E$, alors :

$$-M(a,b)=M(-a,-b)\in E.$$

Donc $(E,+)$ est un groupe abélien.
La matrice identité appartient à E car :

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=M(1,0).$$

De plus :

$$M(a,b)M(c,d)=M(ac-bd,ad+bc+bd).$$

Cette expression est symétrique en (a,b) et (c,d), donc :

$$M(a,b)M(c,d)=M(c,d)M(a,b).$$

Ainsi :

$(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

3) a) **Montrer que :**

$$x^2+xy+y^2=0 \iff x=y=0.$$

Corrigé :
On écrit :

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2.$$

Donc si :

$$x^2+xy+y^2=0,$$

alors :

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2=0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}y^2=0.$$

Donc $y=0$, puis $x=0$. La réciproque est évidente. Ainsi :

$$x^2+xy+y^2=0 \iff x=y=0.$$

b) **Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$.**
Corrigé :
On a :

$$\det M(a,b)=(a+b)a-(-b)b=a^2+ab+b^2.$$

D'après la question précédente :

$$a^2+ab+b^2=0 \iff a=b=0.$$

Donc :

$$M(a,b) \text{ est inversible} \iff (a,b)\neq(0,0).$$

De plus :

$$M(a,b)^{-1}=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}.$$

Cette matrice appartient encore à E car :

$$M(a,b)^{-1}=M\left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2},-\frac{b}{a^2+ab+b^2}\right).$$

Ainsi :

Les inversibles de E sont les $M(a,b)\neq M(0,0)$.

c) **En déduire que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.**
Corrigé :
On a montré que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et que tout élément non nul de E est inversible. Donc :

$(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Deuxième partie

Soit $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

1) **Montrer que $(1, \sigma)$ est une base de $(\mathbb{C}, +)$ sur $\mathbb{R}$.**

Corrigé :

On sait que :

$$\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Donc σ n'est pas réel.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha + \beta\sigma = 0.$$

Si $\beta \neq 0$, alors :

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R},$$

ce qui est impossible car $\sigma \notin \mathbb{R}$.

Donc :

$$\beta = 0.$$

Puis :

$$\alpha = 0.$$

Ainsi, la famille $(1, \sigma)$ est libre dans $\mathbb{C}$.

Or :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Donc $(1, \sigma)$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent :

$$(1, \sigma) \text{ est une base de } \mathbb{C} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

2) **Montrer que ψ est un isomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$.**

Corrigé :

On a :

$$M(a, b) + M(c, d) = M(a + c, b + d).$$

Donc :

$$\psi(M(a, b) + M(c, d)) = (a + c) + \sigma(b + d).$$

Ainsi :

$$\psi(M(a, b) + M(c, d)) = (a + \sigma b) + (c + \sigma d).$$

Donc ψ est un morphisme additif.

Comme $(1, \sigma)$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique :

$$z = a + \sigma b.$$

Ainsi, il existe un unique $M(a, b) \in E$ tel que $\psi(M(a, b)) = z$. Donc ψ est bijective. Par conséquent :

$$\psi \text{ est un isomorphisme de } (E, +) \text{ vers } (\mathbb{C}, +).$$

3) **Résoudre dans $\mathbb{C}$:**

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

Donner les solutions sous forme exponentielle.

Corrigé :

Le discriminant est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 = -3.$$

Donc :

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$$

et :

$$z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}.$$

Par conséquent :

$$S = \left\{e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\right\}.$$

4) **On suppose que $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que ψ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.**

Corrigé :

Comme :

$$\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

alors σ est solution de :

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

Donc :

$$\sigma^2 = \sigma - 1.$$

D'autre part :

$$M(a, b)M(c, d) = M(ac - bd, ad + bc + bd).$$

Donc :

$$\psi(M(a, b)M(c, d)) = ac - bd + \sigma(ad + bc + bd).$$

Or :

$$\psi(M(a, b))\psi(M(c, d)) = (a + \sigma b)(c + \sigma d).$$

Donc :

$$(a + \sigma b)(c + \sigma d) = ac + \sigma(ad + bc) + \sigma^2 bd.$$

Comme $\sigma^2 = \sigma - 1$, on obtient :

$$(a + \sigma b)(c + \sigma d) = ac - bd + \sigma(ad + bc + bd).$$

Donc :

$$\psi(M(a, b)M(c, d)) = \psi(M(a, b))\psi(M(c, d)).$$

Ainsi :

ψ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.

Exercice 4

I

On considère :

$$f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}, x > 0.$$

1) **Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$, puis déterminer les branches infinies.**
Corrigé :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = -\infty.$$

Donc $x = 0$ est une asymptote verticale.
De plus :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

$$x = 0 \text{ asymptote verticale et } y = -\frac{1}{2} \text{ asymptote horizontale.}$$

2) a) **Montrer que :**

$$f'(x) = 4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right).$$

Corrigé :

$$f(x) = 4(\ln x)x^{-2} - \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}x^{-2} - 2(\ln x)x^{-3}\right).$$

Ainsi :

$$f'(x) = 4\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

b) **Dresser le tableau de variations de f.**
Corrigé :
Comme $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2\ln x$.

$$1 - 2\ln x = 0 \iff x = \sqrt{e}.$$

Donc f est croissante sur $]0, \sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

$$f(\sqrt{e}) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2}.$$

D'où :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e} - \frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

3) **Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que :**

$$1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3.$$

Corrigé :
On a :

$$f(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

et :

$$f(\sqrt{e}) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2} > 0.$$

Par TVI et croissance sur $]0, \sqrt{e}]$, il existe une unique solution :

$$\alpha \in]1, \sqrt{e}[.$$

De plus :

$$f(3) = \frac{4\ln 3}{9} - \frac{1}{2} < 0.$$

Comme $f(\sqrt{e}) > 0$ et f est décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, il existe une unique solution :

$$\beta \in]\sqrt{e}, 3[.$$

Donc :

$$1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3.$$

4) **Déterminer l'équation de la tangente (T) en $x_0 = 1$.**
Corrigé :

$$f(1) = -\frac{1}{2}, \qquad f'(1) = 4.$$

Donc :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

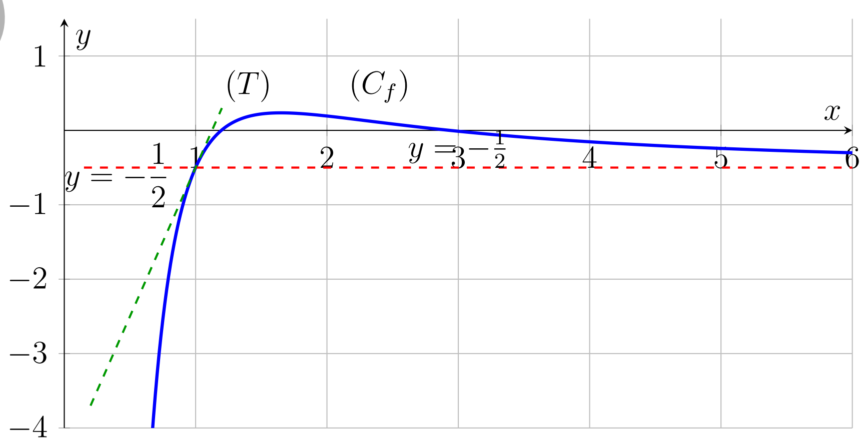
Ainsi :

$$y = 4(x-1) - \frac{1}{2} = 4x - \frac{9}{2}.$$

Par conséquent :

$$(T) : \ y = 4x - \frac{9}{2}.$$

5) **Tracer la courbe (C).**
Corrigé :



II

1) **Montrer que :**

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad 1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1.$$

Corrigé :
Comme $t \geq 0$, on a $t + 1 > 0$.

$$\frac{1}{t+1} \leq 1 \quad \iff \quad 1 \leq t + 1,$$

ce qui est vrai. De plus :

$$1 - t \leq \frac{1}{t+1} \quad \iff \quad (1-t)(t+1) \leq 1.$$

Or :

$$(1-t)(t+1) = 1 - t^2 \leq 1.$$

Donc :

$$1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1.$$

2) **En déduire que :**

$$\forall a \in [0, +\infty[, \qquad a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(a+1) \leq a.$$

Corrigé :
On intègre l'inégalité précédente entre 0 et a :

$$\int_0^a (1-t)dt \leq \int_0^a \frac{1}{t+1}dt \leq \int_0^a 1dt.$$

Donc :

$$a - \frac{a^2}{2} \leq [\ln(t+1)]_0^a \leq a.$$

Ainsi :

$$a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(a+1) \leq a.$$

III

On considère :

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 4.$$

1) **Étudier les variations de f_n.**
Corrigé :

$$f_n'(x) = n\frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Comme :

$$n > 0 \quad \text{et} \quad x^3 > 0 \text{ sur }]0, +\infty[,$$

le signe de $f_n'(x)$ est celui de :

$$1 - 2\ln x.$$

Or :

$$1 - 2\ln x = 0 \iff x = \sqrt{e}.$$

Donc :

$$\begin{cases} f_n'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < \sqrt{e}, \\ f_n'(x) = 0 & \text{si } x = \sqrt{e}, \\ f_n'(x) < 0 & \text{si } x > \sqrt{e}. \end{cases}$$

Ainsi, f_n est croissante sur $]0, \sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.
De plus :

$$f_n(\sqrt{e}) = \frac{n}{2e} - \frac{1}{2}.$$

Et :

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2}.$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n}{2e} - \frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

2) **Étudier la concavité de (C_n) et montrer qu'elle admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{5/6}$.**
Corrigé :

$$f_n'(x) = n(1 - 2\ln x)x^{-3}.$$

Donc :

$$f_n''(x) = n\left[-\frac{2}{x}x^{-3} - 3(1 - 2\ln x)x^{-4}\right].$$

Ainsi :

$$f_n''(x) = \frac{n(6\ln x - 5)}{x^4}.$$

Comme :

$$n > 0 \quad \text{et} \quad x^4 > 0,$$

le signe de $f_n''(x)$ est celui de :

$$6\ln x - 5.$$

Or :

$$6\ln x - 5 = 0 \iff x = e^{5/6}.$$

Donc :

x	0^+		$e^{5/6}$		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
(C_n)		concave	0	convexe	

Comme f_n'' change de signe en $e^{5/6}$, la courbe (C_n) admet un P.I d'abscisse :

$$e^{5/6}.$$

3) a) **Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.**

Corrigé :

On a :

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$$

et :

$$f_{n+1}(x) = \frac{(n+1)\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(\frac{(n+1)\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(n+1)\ln x - n \ln x}{x^2}.$$

D'où :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Or, pour tout $x > 0$, on a :

$$x^2 > 0.$$

Donc le signe de :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

est le signe de :

$$\ln x.$$

On sait que :

$$\ln x < 0 \quad \text{si } 0 < x < 1,$$
$$\ln 1 = 0,$$

et :

$$\ln x > 0 \quad \text{si } x > 1.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} f_{n+1}(x) < f_n(x), & 0 < x < 1, \\ f_{n+1}(1) = f_n(1), & x = 1, \\ f_{n+1}(x) > f_n(x), & x > 1. \end{cases}}$$

b) **En déduire la position relative de (C_n) par rapport à (C_{n+1}).**

Corrigé :

La courbe (C_{n+1}) est au-dessous de (C_n) sur $]0,1[$, les deux courbes se coupent en $x = 1$, et (C_{n+1}) est au-dessus de (C_n) sur $]1,+\infty[$.

4) **Montrer que $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que :**

$$1 < u_n < \sqrt{e} < v_n.$$

Corrigé :

On a :

$$f_n(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

et :

$$f_n(\sqrt{e}) = \frac{n}{2e} - \frac{1}{2} = \frac{n-e}{2e} > 0$$

car $n \geq 4 > e$. Donc il existe une unique solution $u_n \in]1, \sqrt{e}[$ car f_n est croissante sur $]0, \sqrt{e}]$.
De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Comme $f_n(\sqrt{e}) > 0$ et f_n est décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, il existe une unique solution $v_n \in]\sqrt{e}, +\infty[$. Ainsi :

$$1 < u_n < \sqrt{e} < v_n.$$

5) **Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est strictement décroissante.**
Corrigé :
Comme $f_n(u_n) = 0$, on a :

$$f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = \frac{\ln u_n}{u_n^2} > 0$$

car $u_n > 1$. Donc :

$$f_{n+1}(u_n) > 0.$$

Or :

$$f_{n+1}(1) < 0.$$

Puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $]1, \sqrt{e}[$ et que u_{n+1} est son unique zéro dans cet intervalle, on obtient :

$$u_{n+1} < u_n.$$

Donc :

$$(u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

6) a) **Montrer que :**

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1.$$

Corrigé :
On applique l'inégalité de la partie II avec :

$$a = u_n - 1 \geq 0.$$

Alors :

$$a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(a+1) \leq a.$$

Donc :

$$u_n - 1 - \frac{(u_n-1)^2}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1.$$

Or :

$$u_n - 1 - \frac{(u_n-1)^2}{2} = \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}.$$

D'où :

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1.$$

b) **En déduire que :**

$$\frac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{u_n^2}{n(3-u_n)}.$$

Corrigé :

Comme $f_n(u_n) = 0$:

$$\frac{n \ln u_n}{u_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\ln u_n = \frac{u_n^2}{2n}.$$

En remplaçant dans l'encadrement précédent :

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1.$$

Donc :

$$\frac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1.$$

Et, puisque $3 - u_n > 0$:

$$u_n - 1 \leq \frac{u_n^2}{n(3-u_n)}.$$

Ainsi :

$$\frac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{u_n^2}{n(3-u_n)}.$$

c) **Montrer que :**

$$\frac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}.$$

Corrigé :

Comme $u_n > 1$, alors $u_n^2 > 1$, donc :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1.$$

De plus $u_n < \sqrt{e}$, donc $u_n^2 < e$, et $\sqrt{e} < 2$, donc $3 - u_n > 1$. Ainsi :

$$\frac{u_n^2}{n(3-u_n)} < \frac{e}{n}.$$

Donc :

$$\frac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}.$$

d) **En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.**

Corrigé :

On a :

$$0 \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - 1) = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

7) a) **Montrer que :**

$$v_n > e^{5/6}.$$

Corrigé :

Calculons :

$$f_n(e^{5/6}) = \frac{n\ln(e^{5/6})}{(e^{5/6})^2} - \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$f_n(e^{5/6}) = \frac{5n}{6e^{5/3}} - \frac{1}{2}.$$

Comme $n \geq 4$, on a :

$$f_n(e^{5/6}) \geq \frac{20}{6e^{5/3}} - \frac{1}{2}.$$

Cette quantité est positive, donc :

$$f_n(e^{5/6}) > 0.$$

Or $f_n(v_n) = 0$ et f_n est décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$. Donc :

$$v_n > e^{5/6}.$$

b) **En déduire que :**

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Corrigé :

On a :

$$f_n(v_n) = 0.$$

Donc :

$$\frac{n\ln(v_n)}{v_n^2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{n\ln(v_n)}{v_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$n = \frac{v_n^2}{2\ln(v_n)}.$$

Supposons que la suite (v_n) soit bornée.

Alors la suite : $\left(\frac{v_n^2}{2\ln(v_n)}\right)$ serait aussi bornée.

Ce qui est impossible car :

$$n \to +\infty.$$

Donc la suite (v_n) n'est pas bornée.

Or :

$$v_n > \sqrt{e} > 0.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$